Varianta 52

Subiectul I

a) 1. b) 10. c) 0. d) $\frac{120}{13}$. e) 0. f) $\frac{7}{2\sqrt{5}}$.

Subiectul II

1. a) $\frac{1}{11}$. b) 8. c) $2^{2x} \in \{-1,4\} \Rightarrow x = 1$. d) $x \in \{\hat{1},\hat{2}\}$. e) P=1.

2. a) y=0. b) f '(x)=$\frac{-2x}{(x^2+4)^2}$. c) 0,25. d) $f'(1) = -\frac{2}{25}$. e) $\frac{\pi}{4}$.

Subiectul III

a) cardP(A)= $2^{10} = 1024$

b) $X \bigcup Y \subset A, X \bigcap Y \subset A$, deci şi $X \Delta Y \subset A$.

c) X Δ X=Ø.

d) Verificare.

e) $X \bigcup Y = Y \bigcup X$ şi $X \bigcap Y = Y \bigcap X$.

f) Putem folosi diferenţa simetrică sub forma: $X\Delta Y = (X - Y) \bigcup (Y - X)$. Comutativitatea rezultă din d), elementul neutru Ø din c), simetricul lui X este X din b), proprietatea de parte stabilă din a), asociativitatea este considerată cunoscută.

g) $X = \{1,2,3,4,5\} \Delta A \Delta \{6,7,8,9,10\} = Ø$.

h) $X_1 \Delta X_2 \Delta ... \Delta X_n = \varnothing$, (se cuplează *X* şi *A-X*).

Subiectul IV

a) $f'(x) = 2n^2 x - (4n-1)a$.

b) Din $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 4a^2 > 0, (\forall) x \in (0,\infty)$.

c) Inegalitatea rezultă din b)..

d) Pentru n=1 inegalitatea e evidentă. Presupunem inegalitatea adevărată pentru un $n \in \mathbf{N}$.
Avem de demonstrat ca ea este adevarata pentru $n+1$, adica

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_1 + x_2} + ... + \frac{n}{x_1 + ... + x_n} + \frac{n+1}{x_1 + ... + x_n + x_{n+1}} + \frac{(n+1)^2}{2(x_1 + ... + ...x_{n+1})} < 2(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_{n+1}}).$$

Folosind *P(n), P(n+1)* se reduce la relatia $\frac{(n+1)(n+3)}{x_1 + ... + x_n + x_{n+1}} < \frac{n^2}{x_1 + ... + x_n} + \frac{4}{x_{n+1}}$.

Aceasta rezulta din punctul c) pentru $a = x_{n+1}$ *si* $x = x_1 + ... + x_n$.

e) În d) înlocuim $x_1 \to \frac{1}{x_1}, x_2 \to \frac{1}{x_2}, ..., x_n \to \frac{1}{x_n}$, iar ultimul termen din sumă se neglijează.

f) Fie $a_n = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{\frac{1}{n+1} - 1}{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}} = 1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}$

si cum $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$

g) Din e) rezultă $c \le 2$. Fie *c* minim cu proprietatea $h_1 + h_2 + ... + h_n < c(x_1 + x_2 + ... + x_n)$.

În relația anterioară punem $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, ..., x_n = \frac{1}{n}$. Obținem

$$1+\frac{2}{1+2}+...+\frac{n}{1+2+...+n} < c\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 1+\frac{2}{3}+...+\frac{2}{n+1} < c\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{n+1}\right) < c\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow 2\cdot\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}...+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}} < c$$

De unde făcând $n \to \infty$, rezultă că $c \geq 2$. Deci $c = 2$.